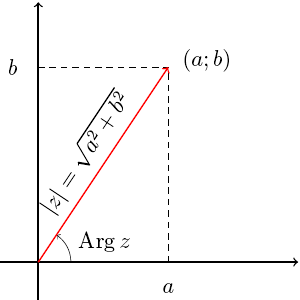
*Комплексное число* — это выражение вида *a* + *bi*, где *a*, *b* — действительные числа, а *i* — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен –1, то есть *i*2 = –1. Число *a* называется *действительной частью*, а число *b* — *мнимой частью* комплексного числа *z* = *a* + *bi*. Если *b* = 0, то вместо *a* + 0*i* пишут просто *a*. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу (*a* + *bi*) ± (*c* + *di*) = (*a* ± *c*) + (*b* ± *d*)*i*, а умножение — по правилу (*a* + *bi*) · (*c* + *di*) = (*ac* – *bd*) + (*ad* + *bc*)*i* (здесь как раз используется, что *i*2 = –1). Число https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a* – *bi* называется *комплексно-сопряженным* к *z* = *a* + *bi*. Равенство *z* · https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a*2 + *b*2 позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form2_493.gif.

(Например, https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form3_138.gif.)

****

У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число *z* = *a* + *bi* можно изображать вектором с координатами (*a*; *b*) на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами (*a*; *b*) равна https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form4_85.gif. Эта величина называется *модулем* комплексного числа *z* = *a* + *bi* и обозначается |*z*|. Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа *z* и обозначается Arg *z*. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2*π* радиан (или 360°, если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала координат не изменит вектор. Но если вектор длины *r* образует угол *φ* с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны (*r* · cos *φ*; *r* · sin *φ*). Отсюда получается *тригонометрическая форма записи* комплексного числа: *z* = |*z*| · (cos(Arg *z*) + *i* sin(Arg *z*)). Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме выглядит очень просто: *z*1 · *z*2 = |*z*1| · |*z*2| · (cos(Arg *z*1 + Arg *z*2) + *i* sin(Arg *z*1 + Arg *z*2)) (при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются). Отсюда следуют *формулы Муавра*: *zn* = |*z*|*n* · (cos(*n* · (Arg *z*)) + *i* sin(*n* · (Arg *z*))). С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form5_14.gif из комплексных чисел. *Корень n-й степени из числа z* — это такое комплексное число *w*, что *wn* = *z*. Видно, что https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form6_109.gif, а https://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form7_216.gif, где *k* может принимать любое значение из множества {0, 1, ..., *n* – 1}. Это означает, что всегда есть ровно *n* корней *n*-й степени из комплексного числа (на плоскости они располагаются в вершинах правильного *n*-угольника).